Elementare Logik II
Vorlesung am 11.4.2011

Programm:

- Bewertungssemantik — 20 min.
    4. Äquivalenzen in **Q**
    5. kontradiktorischer Gegensatz in **Q**
    6. Erfüllbarkeit und Unerfüllbarkeit in **Q**

- Der quantorenlogische Baumkalkül
    - Die Regel NE — 5 min.
    - Die Regel NA — 5 min.
    - Die Regel E — 20 min.
    - Die Regel A — 30 min.
    - Eine neue Strategieregel — 10 min.

Sehr geehrte Leserin, sehr geehrter Leser!

Da Sie hier mein Konzept zur Vorlesung und kein Skriptum in der Hand halten, und ich einige Begriffe lediglich in meinen Notizen verwende und nicht im Hörsaal äußern werde, erlaube ich mir, einige davon kurz zu erläutern.

Michael Matzer

Metatheorem: ein beweisbarer Satz (d.i. ein Theorem) über unser Logiksystem in der deutschen Sprache (also unserer Metasprache).

Korollar: Unmittelbar einsichtige Folgerung, die wegen ebendieser Unmittelbarkeit keines Beweises bedarf.

Korrektheit: als Fachbegriff die Tatsache, dass die Wurzel jedes geschlossenen Baumes unerfüllbar ist. (Ein Beweis der Korrektheit unseres quantorenlogischen Baumkalküls findet sich in unserem Lehrbuch.)

Vollständigkeit: als Fachbegriff die Tatsache, dass es zu jeder unerfüllbaren Formelmenge mindestens einen geschlossenen Baum gibt. (Ein Beweis der Vollständigkeit unseres quantorenlogischen Baumkalküls findet sich in unserem Lehrbuch.)

1. Äquivalenzen in *Q*

Definition.

Für alle Sätze φ und ψ: φ und ψ sind <u>quantorenlogisch äquivalent</u> gdw. φ und ψ bei allen Bewertungen denselben Wahrheitswert haben.

(Die Definition ist beinahe wörtlich dieselbe wie in der Junktorenlogik, wesentlich hat sich aber der zugrundeliegende Begriff des Satzes geändert, damit auch der der Bewertung — sodass die Definition nun auch von Sätzen handelt, die in der Junktorenlogik nicht vorkamen.)

Nachweis der Äquivalenz zweier Formeln: indirekter Beweis aus der Annahme, dass es eine Bewertung gibt, bei der die beiden Formen verschiedene Wahrheitswerte haben.

Ausschluss der Äquivalenz zweier Formeln: Anführen einer Bewertung, bei der die beiden Formeln verschiedene Wahrheitswerte haben.

Metatheorem.

Für alle Sätze φ und ψ gilt: φ und ψ sind quantorenlogisch äquivalent gdw. (φ↔ψ) logisch wahr ist.

Beweisstrategie.

Einen „genau dann, wenn"-Satz kann man u.a. beweisen, indem man die zwei Implikationen, die er enthält, getrennt beweist: zuerst die von links nach rechts, und danach die von rechts nach links.

Beweis.

1. * φ und ψ sind quantorenlogisch äquivalent.
2. φ und ψ haben bei allen Bewertungen denselben Wahrheitswert. (aus 1.)
3. Die Glieder der Bisubjunktion (φ↔ψ) haben bei allen Bewertungen denselben Wahrheitswert. (aus 2.)
4. Die Bisubjunktion (φ↔ψ) hat bei allen Bewertungen den Wert 1. (aus 3.)
5. Die Bisubjunktion (φ↔ψ) ist logisch wahr. (aus 4.)

1. * Die Bisubjunktion $(\varphi\leftrightarrow\psi)$ ist logisch wahr.
2. Die Bisubjunktion $(\varphi\leftrightarrow\psi)$ hat bei allen Bewertungen den Wert 1. (aus 1.)
3. Die Glieder der Bisubjunktion $(\varphi\leftrightarrow\psi)$ haben bei allen Bewertungen denselben Wahrheitswert. (aus 2.)
4. φ und ψ haben bei allen Bewertungen denselben Wahrheitswert. (aus 3.)
5. φ und ψ sind quantorenlogisch äquivalent. (aus 4.)

Q.E.D.

Anmerkung.

Die beiden Implikationen, die das „gdw." ausdrückt, waren in diesem Fall mit exakt denselben Sätzen zu beweisen, es brauchten nur Annahme und Folgerung vertauscht und die dazwischenliegenden Sätze in ihrer Reihenfolge umgekehrt werden. In allen weiteren solchen Fällen werde ich mir das Anführen der umgekehrten Richtung ersparen und lediglich eine entsprechende Anmerkung setzen.

Metatheorem.

Für alle Sätze φ und ψ gilt: φ und ψ sind quantorenlogisch äquivalent gdw. $\{\varphi\}|=\psi$ und $\{\psi\}|=\varphi$.

Beweis.

1. * φ und ψ sind quantorenlogisch äquivalent.
2. φ und ψ haben bei allen Bewertungen denselben Wahrheitswert. (aus 1.)
3. Es gibt keine Bewertung, bei der φ wahr ist und ψ falsch ist. (aus 2.)
4. $\{\varphi\}|=\psi$ (aus 3.)
5. Es gibt keine Bewertung, bei der ψ wahr ist und φ falsch ist. (aus 2.)
6. $\{\psi\}|=\varphi$ (aus 5.)
7. $\{\varphi\}|=\psi$ und $\{\psi\}|=\varphi$ (aus 4, 6.)

1. * $\{\varphi\}|=\psi$ und $\{\psi\}|=\varphi$
2. $\{\varphi\}|=\psi$ (aus 1.)
3. Es gibt keine Bewertung, bei der φ wahr ist und ψ falsch ist. (aus 2.)
4. $\{\psi\}|=\varphi$ (aus 1.)
5. Es gibt keine Bewertung, bei der ψ wahr ist und φ falsch ist. (aus 4.)
6. φ und ψ haben bei allen Bewertungen denselben Wahrheitswert. (aus 3, 5.)
7. φ und ψ sind quantorenlogisch äquivalent. (aus 6.)

Q.E.D.

Beispiel.

$\neg\forall x F^1 x$ und $\exists x \neg F^1 x$ sind quantorenlogisch äquivalent.

Plausibilisierung: Die Negation ist wahr gdw. es mindestens ein falsches Einsetzungsergebnis für x in F^1x gibt; genau das besagt aber die Existenzquantifikation.

Beispiel.

$\neg\exists x F^1 x$ und $\forall x \neg F^1 x$ sind quantorenlogisch äquivalent.

Plausibilisierung: Die Negation ist wahr gdw. es kein einziges wahres Einsetzungsergebnis für x in F^1x gibt; genau das besagt aber die Allquantifikation.

Die Verallgemeinerungen der beiden Beispiele sind die Quantorennegationsgesetze:

Metatheorem.
Für alle Formeln φ und alle Variablen α gilt: $\neg\forall\alpha\varphi$ ist äquivalent mit $\exists\alpha\neg\varphi$.
Beweis entfällt.

Metatheorem.

Für alle Formeln φ und alle Variablen α gilt: $\neg\exists\alpha\varphi$ ist äquivalent mit $\forall\alpha\neg\varphi$.
Beweis entfällt.

Diese beiden Gesetze werden gleich bei der Einführung der Baumregeln NE und NA gebraucht werden.

2. Kontradiktorischer Gegensatz in *Q*

Definition.

Für alle Sätze φ und ψ: φ und ψ bilden einen <u>kontradiktorischen Gegensatz in **Q**</u> gdw. φ und ψ bei allen Bewertungen verschiedene Wahrheitswerte haben.

Nachweis eines kontradiktorischen Gegensatzes zwischen zwei Formeln: indirekter Beweis aus der Annahme, dass es eine Bewertung gibt, bei der die beiden Formeln denselben Wahrheitswert haben.

Ausschluss eines kontradiktorischen Gegensatzes zwischen zwei Formeln: Anführen einer Bewertung, bei der die beiden Formeln denselben Wahrheitswert haben.

Metatheorem.

Für alle Sätze φ und ψ gilt: φ und ψ bilden einen kontradiktorischen Gegensatz in **Q** gdw. $(\varphi\leftrightarrow\psi)$ logisch falsch ist.

Beweis.

1. * φ und ψ bilden einen kontradiktorischen Gegensatz in **Q**.
2. φ und ψ haben bei allen Bewertungen verschiedene Wahrheitswerte. (aus 1.)
3. Die Glieder der Bisubjunktion $(\varphi\leftrightarrow\psi)$ haben bei allen Bewertungen verschiedene Wahrheitswerte. (aus 2.)
4. Die Bisubjunktion $(\varphi\leftrightarrow\psi)$ hat bei allen Bewertungen den Wert 0. (aus 3.)
5. Die Bisubjunktion $(\varphi\leftrightarrow\psi)$ ist logisch falsch. (aus 4.)

(Umkehrung der Reihenfolge 1–5 ergibt die andere Richtung.) <u>Q.E.D.</u>

Beispiele.

$\forall x \neg F^1x$, $\exists x F^1x$

$\exists x\, (F^1x \wedge G^1x)$, $\forall y\, (F^1y \rightarrow \neg G^1y)$

3. Erfüllbarkeit und Unerfüllbarkeit in *Q*

Definition.

Für alle Satzmengen Γ: Γ ist <u>erfüllbar</u> gdw. es mindestens eine Bewertung gibt, bei der alle Elemente von Γ wahr (1) sind.

Definition.

Für alle Satzmengen Γ: Γ ist <u>unerfüllbar</u> gdw. Γ nicht erfüllbar ist, d.h. es keine Bewertung gibt, bei der alle Elemente von Γ wahr (1) sind.

Nachweis der Erfüllbarkeit einer Satzmenge (= Ausschluss ihrer Unerfüllbarkeit): Anführen einer Bewertung, bei der alle Elemente der Satzmenge wahr sind.

Ausschluss der Erfüllbarkeit einer Satzmenge (= Nachweis ihrer Unerfüllbarkeit): indirekter Beweis aus der Annahme, dass es eine Bewertung gibt, bei der alle Elemente der Satzmenge wahr sind. — oder mit dem Baumkalkül, siehe das nächste große Kapitel.

Definition.

Für alle Bewertungen **B** und alle Satzmengen Γ: **B** ist ein <u>Modell</u> von Γ gdw. bei **B** alle Elemente von Γ wahr (1) sind.

Korollar.
Für alle Satzmengen Γ gilt: Γ ist erfüllbar gdw. Γ mindestens ein Modell hat, und Γ ist unerfüllbar gdw. Γ kein Modell hat.

Metatheorem.
Für alle Satzmengen Γ und für alle Sätze φ gilt: $\Gamma \models \varphi$ gdw. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar ist.

Beweis.

1. * $\Gamma \models \varphi$
2. Es gibt keine Bewertung, bei der alle Elemente von Γ wahr sind, aber φ falsch ist. (aus 1.)
3. Es gibt keine Bewertung, bei der alle Elemente von Γ wahr sind, und ¬φ wahr ist. (aus 2.)

4. Es gibt keine Bewertung, bei der alle Elemente von $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ wahr sind. (aus 3.)
5. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ ist unerfüllbar. (aus 4.)

(Umkehrung der Reihenfolge 1–5 ergibt die andere Richtung.) Q.E.D.

Der quantorenlogische Baumkalkül

1. Einleitung

Nach Syntax und Semantik nun der dritte Bestandteil unseres quantorenlogischen Systems **Q**: der quantorenlogische Baumkalkül.

Alle Baumregeln der Junktorenlogik werden unverändert in den quantorenlogischen Baumkalkül übernommen: Anfangsregel, Schließungsregel, die neun Wachstumsregeln. Vielleicht ist es beachtenswert, dass die übernommenen Baumregeln nun auch andere Formeln auszuwerten gestatten als die junktorenlogischen Baumregeln. So z.B. gestattet die Regel D die Auswertung der Disjunktion $(\forall x F^1 x \vee P)$, auf die die junktorenlogische Regel D (klarerweise) keine Anwendung hatte.

Bäume werden konstruiert als Unerfüllbarkeitstest für Satzmengen (nicht: Formelmengen) – jede in einem (korrekt konstruierten) Baum vorkommende Formel ist ein Satz. (Offene Formeln sind nicht wahrheitswertfähig und daher auch nicht kalkülfähig.)

Wachstumsregeln zur Behandlung von Quantifikationen (2 Typen) und ihrer Negationen — das ergibt insgesamt vier neue Baumregeln, darunter allerdings zwei recht einfache.

2. Die Regel NE

Semantische Motivation: Äquivalenz. Möglichkeit weiterer Behandlung des Auswertungsergebnisses mit der Regel A (die in Kürze folgt).

Schema:

$$\begin{array}{c} \surd\ \neg\exists\alpha\varphi \\ | \\ \forall\alpha\neg\varphi \end{array}$$

3. Die Regel NA

Semantische Motivation: Äquivalenz. Möglichkeit weiterer Behandlung des Auswertungsergebnisses mit der Regel E (die in Kürze folgt).

Schema:

$$\begin{array}{c} \surd\ \neg\forall\alpha\varphi \\ | \\ \exists\alpha\neg\varphi \end{array}$$

Anmerkung.
Es gibt im quantorenlogischen Baumkalkül insgesamt drei Wachstumsregeln, die Äquivalenzumformungen sind: DN, NA und NE.

Anmerkung.
Bei den Regeln NA und NE verändern sich beim Übergang zum Auswertungsergebnis nur die ersten drei Zeichen, der ganze Rest des Satzes bleibt gleich und kann zeichenweise übertragen (lies: abgeschrieben) werden.

Beispiel.
Baum für die Satzmenge $\{(\forall xF^1x \rightarrow \neg\exists xG^1x), \neg\exists x\neg F^1x, \neg\forall x\neg G^1x\}$, Auswertung der Subjunktion und der zwei neuen, daraus erhaltenen negierten Quantifikationen:

✓1. $(\forall xF^1x \rightarrow \neg\exists xG^1x)$
2. $\neg\exists x\neg F^1x$
3. $\neg\forall x\neg G^1x$

✓4. $\neg\forall xF^1x$	✓4. $\neg\exists xG^1x$	1, S
4, NA: 5. $\exists x\neg F^1x$	5. $\forall x\neg G^1x$	4, NE
↯(2)	↯(3)	

4. Die Regel E

Semantische Motivation: Einführung eines neuen, noch nicht verwendeten Repräsentanten eines Namens — das Gedankenexperiment mit dem Bombenträger: Wenn ich die Information bekomme (und nur diese): „Irgendjemand im Auditorium der Vorlesung trägt eine Bombe bei sich“, so darf ich den Attentäter nicht mit dem Namen irgendeines Hörers oder einer Hörerin benennen, um weitere Aussagen über ihn zu machen: Das wäre wahrscheinlich zum einen nicht zielführend bei der Verhinderung des Anschlags und zum anderen ein himmelschreiendes Unrecht. Sondern ich muss einen Namen benutzen, der im Auditorium noch niemanden benennt (z.B. „der Bombenträger“), um dann weitere Aussagen über den Übeltäter machen zu können. Beispielsweise: Der Bombenträger trägt eine Bombe bei sich; der Bombenträger hat ein großes, verdächtiges Gepäckstück mit in den Hörsaal gebracht; der Bombenträger ist bereits früher durch aggressives und unangemessenes Verhalten aufgefallen; der Bombenträger ist jetzt gerade hochgradig nervös (und umso mehr, wenn ich jetzt auch noch über ihn spreche); der Bombenträger muss gefunden, verhaftet, und seine Bombe muss entschärft werden, etc. Man kann sich ausmalen, was geschehen würde, wenn in einer solchen Situation statt „der Bombenträger“ willkürlich der Name eines Hörers oder einer Hörerin verwendet würde und daraufhin auch noch entsprechende Schritte gesetzt würden! Denn worauf würde ich mit der dürftigen Information „irgendjemand“ die Entscheidung gründen, einen bestimmten und keinen anderen Namen zu verwenden? — Die obigen Sätze mit einem konkreten Namen statt „der Bombenträger“ wären zwar informativer, aber ihre Wahrheit wäre höchstens ein Zufallstreffer, während die Aussagen mit „der Bombenträger“ bei geringerem Informationsgehalt sicher wahr sind.

Schema:

$$\begin{array}{c} \surd\ \exists\alpha\varphi \\ | \\ [\varphi]\ \gamma/\alpha \end{array} \qquad\qquad \boldsymbol{\gamma}\ \textbf{NEU!!}$$

Die Individuenkonstante γ muss, zumindest in allen Ästen, auf denen die Existenzquantifikation liegt, neu sein. Noch sicherer (und durchaus erlaubt) ist die Verwendung einer Individuenkonstanten, die in dem ganzen Baum neu ist.

Plausibilisierung der Notwendigkeit einer neuen Individuenkonstante: für die erfüllbare Satzmenge $\{\exists x F^1x, \neg F^1a\}$ darf (um der Korrektheit des Kalküls willen) kein geschlossener Baum konstruiert werden können.

D.h. bei der Anwendung der Regel E (und auch bei der gleich folgenden Regel A) darf man nicht nur auf die Formel selbst sehen, sondern man muss auch alle offenen Äste überblicken, auf denen der auszuwertende Satz liegt.

5. Die Regel A

Semantische Motivation: Die Allquantifikation ist ein sehr starker Satz, da bei ihrer angenommenen Wahrheit jedes Einsetzungsergebnis in die Formel hinter dem Quantifikator für die Variable im Quantifikator auch als wahr angenommen werden kann. Die Frage ist, welche Auswertungsergebnisse am ehesten zu geschlossenen Bäumen führen, und ob nicht manche überflüssig sind.

Schema:

$$\begin{array}{c} \forall\alpha\varphi \\ | \\ [\varphi]\ \gamma/\alpha \end{array} \qquad\qquad \boldsymbol{\gamma}\ \textbf{relevant} \text{ – und noch andere Besonderheiten}$$

Definition.

Für jede Individuenkonstante γ: γ ist in einem Ast eines quantorenlogischen Baumes <u>relevant</u> gdw. entweder a) γ in irgendeiner Formel auf diesem Ast vorkommt — oder b) γ identisch ist mit 'a', falls in (überhaupt) keiner Formel in diesem Ast eine Individuenkonstante vorkommt.

Plausibilisierung:
Für die unerfüllbare Formelmenge $\{\forall x F^1x, \neg F^1c\}$ führt nur die Auswertung mit 'c' zu einem geschlossenen Baum.

Auswertung evtl. mehrfach
Für die unerfüllbare Formelmenge $\{\forall x F^1x, (\neg F^1a \vee \neg F^1b)\}$ führt nur eine zweifache Auswertung der Allquantifikation zu einem geschlossenen Baum.[1]

Daher: eine Allquantifikation **nicht abhaken, sondern erschöpfen** auf allen Ästen, auf denen sie liegt.

Definition.

Ein Satz $\forall\alpha\varphi$ ist auf einem Ast eines quantorenlogischen Baumes <u>erschöpft</u> gdw. für alle in dem Ast relevanten Individuenkonstanten γ auch die Formel $[\varphi]\ \gamma/\alpha$ in dem Ast enthalten ist.

Definition.

Ein Ast eines Baumes ist <u>fertig</u> gdw. auf ihm keine Formel mehr auswertbar ist.

Definition.

Eine Formel ist in einem offenen Ast <u>nicht mehr auswertbar</u> gdw. a) sie ein Literal ist — oder b) sie abgehakt ist — oder c) sie eine erschöpfte Allquantifikation ist.

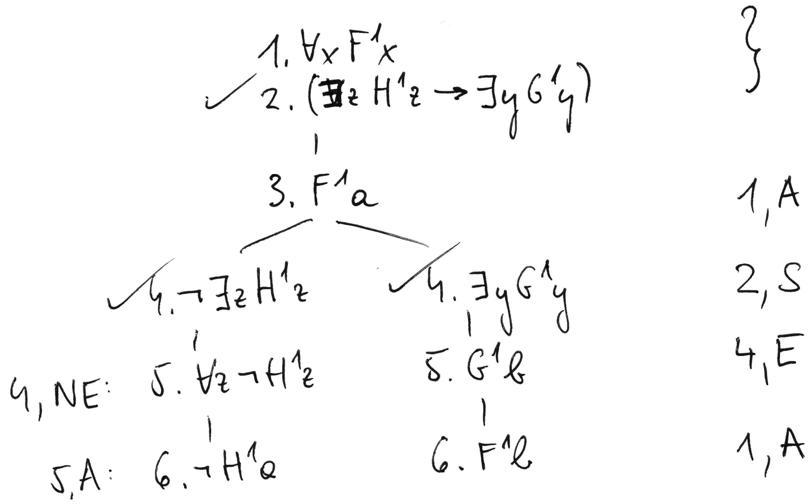
Anmerkung.
Die Definitionen für fertige Äste und Bäume etc., die wortgleich aus der Junktorenlogik übernommen werden können, sind hier nicht erneut angeführt.

Beispiel.
Baum für die (erfüllbare) Satzmenge $\{\forall x P^2ax, \neg P^2ba\}$: '$P^2aa$' und '$P^2ab$' sind anzuhängen, dann ist der Baum fertig und offen.

1 Mehrfache Auswertungen von Allquantifikationen tragen zur Vollständigkeit des quantorenlogischen Baumkalküls bei.

Pro Regelanwendung wird das Auswertungsergebnis nur auf einem einzigen Ast eingetragen.
Sonst könnten Individuenkonstanten, die in manchen Ästen gar nicht relevant sind, in diese „eingeschleppt“ werden.

Beispiel.



Würde 'F^1b' (6 re., aus 1 nach A) auch auf dem linken Ast eingetragen, so verlöre aus Allquantifikation 5 re. ihren Status der Erschöpftheit.

Anmerkung.
Sobald auf einem Ast eine Existenzquantifikation, bei der die quantifizierte Variable in der Formel hinter dem Quantifikator vorkommt, ausgewertet wird, ist auf diesem Ast keine einzige Allquantifikation mehr erschöpft.

Daher:

6. Strategie „NA und E vor A“

Beispiel.
Baum für $\{\forall xF^1x, \exists x\neg F^1x\}$ in zwei Varianten: „ökonomisch“ (Existenzquantifikation zuerst auswerten) und unter „Verschwendung“ der Individuenkonstanten 'a' (Allquantifikation zuerst auswerten).

7. Falls noch Zeit bleibt: Ein (etwas komplizierteres) Beispiel[2]

1. $\forall z (B^1 z \to C^2 zz)$		Wurzel
✓ 2. $\exists x\, B^1 x$		
✓ 3. $\neg \forall y\, C^2 yy$		
✓ 4. $\exists y \neg C^2 yy$		3, NA
5. $B^1 a$		2, E
6. $\neg C^2 bb$		4, E
✓ 7. $(B^1 a \to C^2 aa)$		1, A
✓ 8. $(B^1 b \to C^2 bb)$		1, A
9. $\neg B^1 a$	9. $C^2 aa$	7, S
↯ (5)	10. $B^1 b$ | 10. $C^2 bb$	8, S
	↯ (8)	

fertiger offener Baum

Literatur: Kamitz, Reinhard: *Logik — Faszination der Klarheit. Eine Einführung für Philosophinnen und Philosophen mit zahlreichen Anwendungsbeispielen*, 2 Bde., Wien u.a.: LIT Verlag 2007 (Einführungen Philosophie 11f.)

2 Vgl. Kamitz, R.: *Logik — Faszination der Klarheit*, Bd. 2, S. 271.