Übung zur Elementaren Logik
Michael Matzer-Hernler
(7 Seiten)

Der aussagenlogische Kalkül des natürlichen Schließens

(nach einem Skriptum von Prof. Hannes Leitgeb)

1. Regeln zur Negationseinführung:
   - Doppelte Negation 1:

     $k.\ A$
     $n.\ \neg\neg A$ $\qquad$ $k.$, (DN1)
   - U.U. auch Indirekter Beweis (in einem Spezialfall):

     $k.\ \mid \neg\neg A$ $\qquad$ (IB-Annahme)
     $\quad \mid \vdots$
     $m.\ \mid (B \wedge \neg B)$
     $n.\ \neg A$ $\qquad$ $k.$–$m.$, (IB)
2. Regeln zur Negationsbeseitigung:
   - Doppelte Negation 2:

     $k.\ \neg\neg A$
     $n.\ A$ $\qquad$ $k.$, (DN2)
3. Regeln zur Konjunktionseinführung:
   - (Konjunktion):

     $k.\ A$
     $l.\ B$
     $n.\ (A \wedge B)$ $\qquad$ $k.$, $l.$, (KON)
4. Regeln zur Konjunktionsbeseitigung:
   - Simplifikation 1:

     $k.\ (A \wedge B)$
     $n.\ A$ $\qquad$ $k.$, (SIMP1)
   - Simplifikation 2:

     $k.\ (A \wedge B)$
     $n.\ B$ $\qquad$ $k.$, (SIMP2)
5. Regeln zur Disjunktionseinführung:
   - Addition 1:

     $k.\ A$
     $n.\ (A \vee B)$ $\qquad$ $k.$, (ADD1)
   - Addition 2:

     $k.\ A$
     $n.\ (B \vee A)$ $\qquad$ $k.$, (ADD2)
   - Disjunktion:

     $k.\ (A \to C)$
     $l.\ (B \to C)$
     $n.\ ((A \vee B) \to C)$ $\qquad$ $k.$, $l.$, (DIS)
6. Regeln zur Disjunktionsbeseitigung:

- Disjunktiver Syllogismus 1:

$k.$	$(A \vee B)$	
$l.$	$\neg A$	
$n.$	B	$k.$, $l.$, (DS1)

- Disjunktiver Syllogismus 2:

$k.$	$(A \vee B)$	
$l.$	$\neg B$	
$n.$	A	$k.$, $l.$, (DS2)

7. Regeln zur Implikationseinführung:

- Konditionaler Beweis:

$k.$	A	(KB-Annahme)
	$\vdots$	
$m.$	B	
$n.$	$(A \to B)$	$k.$–$m.$, (KB)

8. Regeln zur Implikationsbeseitigung:

- Modus Ponens:

$k.$	A	
$l.$	$(A \to B)$	
$n.$	B	$k.$, $l.$, (MP)

- Modus Tollens:

$k.$	$(A \to B)$	
$l.$	$\neg B$	
$n.$	$\neg A$	$k.$, $l.$, (MT)

9. Regeln zur Äquivalenzeinführung:

- Einführung der Äquivalenz:

$k.$	$(A \to B)$	
$l.$	$(B \to A)$	
$n.$	$(A \leftrightarrow B)$	k,. $l.$, (ÄQ-EIN)

10. Regeln zur Äquivalenzbeseitigung:

- Elimination der Äquivalenz 1:

$k.$	$(A \leftrightarrow B)$	
$n.$	$(A \to B)$	$k.$, (ÄQ-ELIM1)

- Elimination der Äquivalenz 2:

$k.$	$(A \leftrightarrow B)$	
$n.$	$(B \to A)$	$k.$, (ÄQ-ELIM2)

11. Sonstige Schlussregeln:

- Triviale Schlussform:

$k.$	A	
$n.$	A	$k.$, (TS)

- Ex Contradictione Quodlibet:

$k.$	A	
$l.$	$\neg A$	
$n.$	B	$k.$, $l.$, (ECQ)

- Indirekter Beweis (allgemein):

$$\begin{array}{r|ll} k. & \neg A & \qquad\qquad\qquad\qquad \text{(IB-Annahme)} \\ & \vdots & \\ m. & (B \wedge \neg B) & \end{array}$$
$$\begin{array}{rll} n. & A & \qquad\qquad\qquad\qquad k.\text{–}m., \text{(IB)} \end{array}$$

- Vollständige Fallunterscheidung:

$$\begin{array}{r|ll} i. & A & \qquad\qquad\qquad\qquad \text{(FU-Annahme 1)} \\ & \vdots & \\ k. & B & \end{array}$$
$$\begin{array}{r|ll} l. & \neg A & \qquad\qquad\qquad\qquad \text{(FU-Annahme 2)} \\ & \vdots & \\ m. & B & \end{array}$$
$$\begin{array}{rll} n. & B & \qquad\qquad\qquad\qquad i.\text{–}m., \text{(FU)} \end{array}$$

Vgl. Hannes Leitgeb, *Logik I. Eine Einführung in die klassische Aussagen- und Prädikatenlogik*, online verfügbar unter: `https://www.mcmp.philosophie.uni-muenchen.de/people/faculty/hannes_leitgeb/logik_1_wise20182019/logikskript.pdf`, Zugriff am 30.10.2018, S. 154f.

Herleitungsstrategien

a. Prämissenstrategien

Wenn eine Formel der gegebenen Form für die Herleitung verfügbar ist[1], können Sie Folgendes versuchen.

- $\neg A$
  - Wenn Sie auch eine Implikationsformel $(B \rightarrow A)$ bereits haben oder herleiten können, dann versuchen Sie (MT).
  - Wenn Sie auch eine Disjunktionsformel $(A \vee B)$ oder $(B \vee A)$ bereits haben oder herleiten können, dann versuchen Sie (DS1) bzw. (DS2).
  - Wenn Sie auch die Formel A haben oder herleiten können, dann können Sie mit (ECQ) jede Formel einführen, die Sie für zielführend erachten.
  - Sie können auch einen (IB) versuchen, in dessen Verlauf Sie die Formel A herleiten — dann können Sie mit Hilfe der Regel (KON) den Widerspruch der geforderten Form $(A \wedge \neg A)$ für den Abschluss des (IB) einführen.
- $(A \wedge B)$
  - Hier ist häufig die Beseitigung der Konjunktion mit Hilfe von (SIMP1) bzw. (SIMP2) zielführend.
- $(A \vee B)$
  - Wenn Sie auch eine der Formeln $\neg A$ oder $\neg B$ bereits haben oder herleiten können, dann versuchen Sie (DS1) bzw. (DS2).
  - Wenn Sie auch zwei Implikationsformeln $(A \rightarrow C)$ und $(B \rightarrow C)$ bereits haben oder herleiten können, dann versuchen Sie (DIS) gefolgt von (MP).
  - Sie können auch eine (FU) mit FU-Annahmen A / $\neg A$ oder B / $\neg B$ versuchen — für die hypothetische Herleitung aus FU-Annahme 2 ist dann häufig (DS1) bzw. (DS2) zielführend.
- $(A \rightarrow B)$
  - Wenn Sie auch die Formel A bereits haben oder herleiten können, dann versuchen Sie (MP).
  - Wenn Sie auch die Formel $\neg B$ bereits haben oder herleiten können, dann versuchen Sie (MT).
- $(A \leftrightarrow B)$
  - Versuchen Sie (ÄQ-ELIM1) bzw. (ÄQ-ELIM2) — dann haben Sie eine oder zwei Implikationsformeln, mit denen Sie weiterarbeiten können.

b. Konklusionsstrategien

Wenn Sie eine Formel der gegebenen Form herleiten müssen, gehen Sie am Besten wie angegeben vor.

- $\neg A$
  Wenn Sie keinen direkten Weg sehen, um $\neg A$ herzuleiten, dann nehmen Sie $\neg\neg A$ an (als IB-Annahme) und arbeiten Sie sich zu einem Widerspruch vor. Eliminieren Sie dann die Annahme $\neg\neg A$, indem Sie mit Regel (IB) die Formel $\neg A$ einführen.
- $(A \wedge B)$
  Leiten Sie die beiden Konjunktionsglieder A und B einzeln her, und führen Sie dann die Konjunktionsformel $(A \wedge B)$ mit (KON) ein.

[1] d.h. entweder eine Prämisse (so welche vorhanden sind) oder im Bereich eines (KB), (IB), einer (FU) oder (EB), die noch nicht abgeschlossen sind

- $(A \vee B)$
  Wenn Sie eines der Disjunktionsglieder A oder B bereits haben, dann führen Sie die Disjunktion durch (ADD1) bzw. (ADD2) ein. Wenn Sie keines der beiden Disjunktionsglieder haben und Sie auch keinen Weg sehen, um eines herzuleiten, dann versuchen Sie eine vollständige Fallunterscheidung: Leiten Sie $(A \vee B)$ einmal durch Addition aus A ab, und einmal durch Addition aus B. Wenn auch das nicht möglich ist, versuchen Sie es mit der Annahme $\neg(A \vee B)$ als IB-Annahme, führen Sie diese auf einen Widerspruch zurück, und Sie gelangen durch (IB) zu der Formel $(A \vee B)$.

- $(A \rightarrow B)$
  Nehmen Sie das Vorderglied A als KB-Annahme an und arbeiten Sie sich zum Nachglied B vor. Eliminieren Sie dann die Annahme A durch (KB).

- $(A \leftrightarrow B)$
  Leiten Sie die beiden Implikationsformeln $(A \rightarrow B)$ und $(B \rightarrow A)$ einzeln her und führen Sie dann aus diesen beiden die Äquivalenzformel per (ÄQ-EIN) ein.

Vgl. Hannes Leitgeb, *Logik I*, S. 155f., 204 u. John Nolt, *Logics*, Belmont (CA) u.a. 1997, S. 99.

Der prädikatenlogische Kalkül des natürlichen Schließens

(nach einem Skriptum von Prof. Hannes Leitgeb)

1. Regeln zur Allquantorbeseitigung:
   - Universelle Beseitigung:

     $k.\ \forall vA$

     $n.\ A[t/v]$ $\qquad$ $k.$, (UB)

2. Regeln zur Existenzquantoreinführung:
   - Existenzielle Einführung:

     $k.\ A[t/v]$

     $n.\ \exists vA$ $\qquad$ $k.$, (EE)

3. Regeln zur Allquantoreinführung:
   - Universelle Einführung:

     $k.\ A[t/v]$

     $n.\ \forall vA$ $\qquad$ $k.$, (UE)

     Achtung: t darf nicht in den Zeilen (frei, sofern es eine Variable ist) vorkommen, von denen Zeile n abhängt,[2] und t darf nicht in A (frei) vorkommen.

4. Regeln zur Existenzquantorbeseitigung:
   - Existenzielle Beseitigung:

     $k.\ \exists vA$

     $l.\ \mid A[t/v]$ $\qquad$ (EB-Annahme)

     $\quad \mid \vdots$

     $m.\ \mid B$

     $n.\ B$ $\qquad$ $l.$–$m.$, (EB)

     Achtung: t darf nicht in den Zeilen (frei, sofern es eine Variable ist) vorkommen, von denen Zeile n abhängt, und t darf weder in A noch in B (frei) vorkommen.

Achtung: Bei allen Regelanwendungen muss t frei sein zum Einsetzen für v in A.

Vgl. Hannes Leitgeb, *Logik I*, S. 257f., 204.

[2] d.s. alle Prämissen (so welche vorhanden sind), und Zusatzannahmen für (KB), (IB), (FU) und (EB), die in Zeile n noch nicht abgeschlossen sind

Der prädikatenlogische Kalkül des natürlichen Schließens mit Identität

(nach einem Skriptum von Prof. Hannes Leitgeb)

1. Reflexivität:
   $n.\ \forall v\, v = v$ (REF)

2. Substitution:
   $n.\ \forall v_1 \forall v_2((v_1 = v_2 \wedge A[v_1/v_3]) \rightarrow A[v_2/v_3])$ (SUB)

Vgl. Hannes Leitgeb, *Logik I*, S. 271.