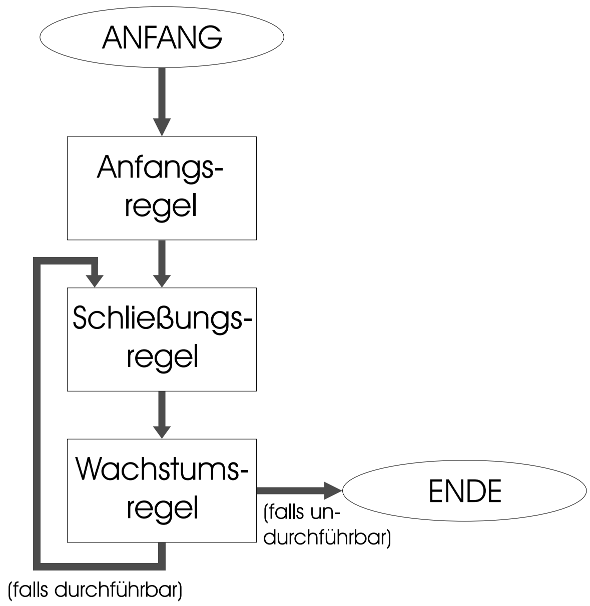
Übung zur Elementaren Logik I
Michael Matzer

Abriss über den Baumkalkül (1)

1 Ablaufschema



- Jede Anwendung des Baumkalküls beginnt mit der Anfangsregel.
- Nach jeder Regelanwendung (auch der Anfangsregel[1]) wird die Schließungsregel angewendet. Dies kann, muss aber nicht, zur Schließung eines oder mehrerer Äste des Baumes führen.
- Die Schließung eines Astes erfolgt durch das Anbringen des Schließungszeichens ‚↯'; auf einen geschlossenen Ast ist keine weitere Baumregel mehr anwendbar.
- Jede Wachstumsregel ist vollständig auszuführen, d.h.:
  - Das Ergebnis der Auswertung irgendeiner Formel ist auf *jedem* offenen Ast unter der Formel (aber auf keinem anderen) einzutragen.[2]
  - Die Anwendung einer Wachstumsregel ist für keine andere Regelanwendung (insbesondere der Schließungsregel) abzubrechen.[3]
- Ein Baum ist *fertig* genau dann, wenn keine Baumregel mehr anwendbar ist. Dies ist der Fall gdw.[4]:
  - Alle Äste des Baumes geschlossen sind, sodass der Baum geschlossen ist – und / oder
  - wenn alle auswertbaren Formeln in dem Baum auch ausgewertet (und zwar genau einmal ausgewertet) sind.
- Ein Baum ist *geschlossen* gdw. jeder seiner Äste geschlossen ist; sonst ist er offen. (NB[5]: Jeder geschlossene Baum ist fertig, aber unter den offenen Bäumen gibt es sowohl fertige als auch unfertige.)

---

[1] Denn es könnte ja bereits die Formelmenge, für die ein Baum zu konstruieren ist, einen eklatanten Widerspruch enthalten. (Was ein „eklatanter Widerspruch" ist, wird bei der Schließungsregel weiter unten erklärt werden.)

[2] In der Junktorenlogik gilt das uneingeschränkt. Erst in der Elementaren Logik II werden wir die Regel A kennenlernen — und diese wird die einzige bleiben — bei der das nicht so ist.

[3] Das äußert sich in der obigen Abbildung darin, dass das Kästchen „Wachstumsregel" für den Fall der Durchführbarkeit keinen seitlichen Ausgang und keinen Ausgang aus seiner Mitte hat, sondern stets von seiner oberen bis zur unteren Kante durchlaufen werden muss.

[4] ‚gdw.' ist eine gängige Abkürzung für „genau dann, wenn".

[5] Das Zeichen ‚NB' für „Notabene" („Merke wohl!") ist im Unterschied zu der Abkürzung ‚NB' für die Wachstumsregel NB unterstrichen.

2 Die Baumregeln

2.1 Die Anfangsregel

Man schreibe alle Formeln der Formelmenge zeilenweise untereinander, jede Formel genau ein Mal.[6]

2.2 Die Schließungsregel

Ein Ast eines Baumes ist zu schließen, sobald auf ihm ein sog. „eklatanter Widerspruch" auftritt, d.h. sobald auf ihm eine Formel φ zusammen mit ihrer Negation $\neg\varphi$ auftritt.

Semantische Motivation: Es gibt keine Bewertung, bei der ein Satz φ sowohl wahr als auch falsch ist, d.h. bei der sowohl ein Satz φ als auch seine Negation $\neg\varphi$ wahr sind.

NB: Dies gilt für beliebige Formeln φ und nicht nur für atomare. So bilden z.B. ‚P' und ‚$\neg P$' einen eklatanten Widerspruch, aber auch ‚$\neg\neg P$' und ‚$\neg P$' sowie ‚$(P \wedge Q)$' und ‚$\neg(P \wedge Q)$'.

2.3 Die junktorenlogischen Wachstumsregeln

Der Baumkalkül hat eine grundlegende Eigenschaft, von der wir bei der folgenden Erarbeitung der Baumregeln Gebrauch machen werden: Sämtliche Wachstumsregeln sind so angelegt, dass bei Wahrheit irgendwelcher Formeln „weiter oben" im Baum (bei irgendeiner Bewertung) die Formeln, die daraus „weiter unten" im Baum gewonnen werden, ebenso wahr sind (bei irgendeiner Bewertung).[7]

Ferner ist zu beachten, dass im Baumkalkül der syntaktische Status der Formel (Konjunktion, Disjunktion, Negation einer Subjunktion etc.) *ausschließlich und vollständig* die auf die entsprechende Formel anzuwendende Regel bestimmt – auf eine Konjunktion ist *nur* die Regel K anzuwenden, auf eine Disjunktion *nur* die Regel D, auf eine negierte Subjunktion *nur* die Regel NS, usw. Die Feststellung des syntaktischen Status einer Formel[8] ist also für die Anwendung des Baumkalküls ein notwendiges Rüstzeug!

Bei der nun folgenden Erarbeitung der Wachstumsregeln können wir also stets fragen: „Wann ist eine so-und-so zusammengesetzte Formel wahr [bei irgendeiner Bewertung][9]?" – und aus ihren Wahrheitsbedingungen, die den unten stehenden Wahrheitstafeln entnommen werden können, ergeben sich die semantischen Motivationen für die einzelnen Baumregeln.

NB: Bei Negationen $\neg\varphi$ können wir statt nach der Wahrheit der Negation genauso gut fragen (und werden das auch tun, s.u.), wann die negierte Formel φ *falsch* ist – denn wie bereits bekannt sein dürfte (und auch der untenstehenden Tafel zu entnehmen ist), ist eine Negation $\neg\varphi$ wahr gdw. die negierte Formel („das Negat") φ falsch ist.

NB: Bei den Regeln für junktorenlogische Bäume ist jede Formel, auf welche eine Wachstumsregel angewendet wurde, als ausgewertet zu kennzeichnen (z.B. durch Abhaken).

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

φ	ψ	$(\varphi \wedge \psi)$	$(\varphi \vee \psi)$	$(\varphi \rightarrow \psi)$	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

2.3.1 Die Regel DN

$$\begin{array}{c} \surd\ \neg\neg\varphi \\ | \\ \varphi \end{array}$$

Semantische Motivation: die logische Äquivalenz einer Formel mit ihrer doppelten Negation.

[6] Aufgrund der zu erwartenden Verzweigungen empfiehlt es sich, in horizontaler Richtung ungefähr in der Blattmitte zu beginnen.

[7] Spezialisten nennen diese Eigenschaft die „Erblichkeit der Erfüllbarkeit".

[8] zumindest über zwei Stufen: Konjunktion – Regel K, Disjunktion – Regel D; aber bei Negationen ist noch nachzusehen, welcher Formeltyp negiert ist: Negation einer Negation (doppelte Negation) – Regel DN, Negation einer Subjunktion – Regel NS, usf.

[9] Der – streng genommen stets notwendige – Zusatz über Bewertungen wird der Kürze halber entfallen.

2.3.2 Die Regel K

$$\begin{array}{c} \surd\ (\varphi \land \psi) \\ | \\ \varphi \\ \psi \end{array}$$

Semantische Motivation: Eine Konjunktion ist wahr gdw. das linke Konjunktionsglied φ wahr ist <u>und</u> das rechte Konjunktionsglied ψ wahr ist.

2.3.3 Die Regel D

$$\begin{array}{c} \surd\ (\varphi \lor \psi) \\ \diagup \quad \diagdown \\ \varphi \qquad \psi \end{array}$$

Semantische Motivation: Eine Disjunktion ist wahr gdw. das linke Disjunktionsglied φ wahr ist <u>oder</u> das rechte Disjunktionsglied ψ wahr ist. Welcher Fall vorliegt, das wissen wir nicht – deshalb spalten wir unsere Ableitung auf, um jede Alternative separat zu erproben.

2.3.4 Die Regel ND

$$\begin{array}{c} \surd\ \neg(\varphi \lor \psi) \\ | \\ \neg\varphi \\ \neg\psi \end{array}$$

Semantische Motivation: Eine Disjunktion ist falsch gdw. das linke Diskjunktionsglied φ falsch ist <u>und</u> das rechte Disjunktionsglied ψ falsch ist.

2.3.5 Die Regel NK

$$\begin{array}{c} \surd\ \neg(\varphi \land \psi) \\ \diagup \quad \diagdown \\ \neg\varphi \qquad \neg\psi \end{array}$$

Semantische Motivation: Eine Konjunktion ist falsch gdw. das linke Konjunktionsglied φ falsch ist <u>oder</u> das rechte Konjunktionsglied ψ falsch ist. Welcher Fall vorliegt, das wissen wir nicht – deshalb spalten wir unsere Ableitung auf, um jede Alternative separat zu erproben.

2.3.6 Die Regel S

$$\begin{array}{c} \surd\ (\varphi \to \psi) \\ \diagup \quad \diagdown \\ \neg\varphi \qquad \psi \end{array}$$

Semantische Motivation: Eine Subjunktion ist wahr gdw. das Vorderglied φ falsch ist[10] <u>oder</u> das Nachglied ψ wahr ist[11].

2.3.7 Die Regel NS

$$\begin{array}{c} \surd\ \neg(\varphi \to \psi) \\ | \\ \varphi \\ \neg\psi \end{array}$$

Semantische Motivation: Eine Subjunktion ist falsch gdw. das Vorderglied wahr ist <u>und</u> das Nachglied falsch ist.

2.3.8 Die Regel B

$$\begin{array}{c} \surd\ (\varphi \leftrightarrow \psi) \\ \diagup \quad \diagdown \\ \begin{array}{cc} \varphi & \neg\varphi \\ \psi & \neg\psi \end{array} \end{array}$$

Semantische Motivation: Eine Bisubjunktion ist wahr gdw. beide Bisubjunktionsglieder denselben Wahrheitswert haben, d.h. wenn (1) beide Bisubjunktionsglieder φ <u>und</u> ψ wahr sind – <u>oder</u> (2) wenn beide Bisubjunktionsglieder φ <u>und</u> ψ falsch sind. Welcher Fall vorliegt, das wissen wir nicht – deshalb spalten wir unsere Ableitung auf, um jede Alternative separat zu erproben.

2.3.9 Die Regel NB

$$\begin{array}{c} \surd\ \neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \\ \diagup \quad \diagdown \\ \begin{array}{cc} \varphi & \neg\varphi \\ \neg\psi & \psi \end{array} \end{array}$$

Semantische Motivation: Eine Bisubjunktion ist falsch gdw. beide Bisubjunktionsglieder verschiedene Wahrheitswerte haben, d.h. wenn (1) das linke Bisubjunktionsglied φ wahr <u>und</u> das rechte Bisubjunktionsglied ψ falsch ist – <u>oder</u> (2) wenn das linke Bisubjunktionsglied φ falsch <u>und</u> das rechte Bisubjunktionsglied ψ wahr ist. Welcher Fall vorliegt, das wissen wir nicht – deshalb spalten wir unsere Ableitung auf, um jede Alternative separat zu erproben.

[10] Das sagen uns die dritte und die vierte Zeile der obigen Wahrheitstafel.
[11] Das sagen uns die erste und die dritte Zeile der obigen Wahrheitstafel.

2.3.10 Systematik der verzweigenden und nicht verzweigenden Regeln

Über Verlängerungs- und Verzweigungsregeln im Zusammenhang mit ihren semantischen Motivationen stellen wir fest:

- Jede Regel, die auf eine zweigliedrige Formel anzuwenden ist und deren semantische Motivation ein „und“-Satz ist, ist eine Verlängerungsregel.
- Jede Regel, die auf eine zweigliedrige Formel anzuwenden ist und deren semantische Motivation ein „oder“-Satz (mit einer Anmerkung der Art „Welcher Fall vorliegt, das wissen wir nicht…“) ist, ist eine Verzweigungsregel.
- Die semantische Motivation der Regeln B und NB ist je ein „oder“-Satz – daher sind sie Verzweigungsregeln; jeder der (oben nummerierten) „oder“-Sätze enthält aber in sich noch je ein „und“, deshalb wird jeder neu entstandene Ast um zwei Formeln verlängert.

Bei der vergleichenden Durchsicht der Baumregeln können wir Folgendes feststellen:

- Bei den Regelpaaren K/NK, D/ND und S/NS verzweigt stets die eine Regel, während die andere nicht verzweigt.
- DN verzweigt nie.
- Bei dem Regelpaar B/NB verzweigen beide.

verlängernd:	K	ND	NS	DN	
verzweigend:	NK	D	S	B	NB

2.4 Allgemeine Anmerkung

Es gibt im junktorenlogischen Baumkalkül keine anderen Regeln als die oben angeführten – insbesondere keine Abkürzungsregeln, die erlauben, gleichsam durch „Kopfrechnen“ zwei Regelanwendungen in einen Schritt zu fassen! Beispielsweise ist die Formel ‚$(\neg P \rightarrow Q)$‘ nur wie folgt aufzulösen – in zwei Schritten, durch Anwendung zuerst der Regel S und dann der Regel DN (unter der Voraussetzung für den zweiten Schritt, dass ‚$\neg\neg P$‘ zu keinem eklatanten Widerspruch auf dem linken Ast führt):

$$
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{\surd\ (\neg P \rightarrow Q)} \\
\surd\ \neg\neg P & Q \\
P &
\end{array}
$$

Nicht statthaft wäre es hingegen, auf dem linken Ast sofort nach der Verzweigung bloß das ‚P‘ anzuschreiben und so die Anwendungen der beiden Regeln S und DN in einen Schritt zu fassen.