

Abriss über den Baumkalkül (2)

Dieses Papier versteht sich als Fortsetzung des Handouts „Abriss über den Baumkalkül (1)“. Das allgemeine Ablaufschema (der Algorithmus) und die Regeln der Junktorenlogik bleiben vollgültig in Kraft.

Zur Notation: Wenn φ eine Formel, α eine Variable und δ eine Individuenkonstante ist, so bezeichnet $[\varphi]\delta/\alpha$ (lies: „ φ mit δ für α “) das Ergebnis der Einsetzung von δ für α in φ .

1 Neue Baumregeln

1.1 Neue Wachstumsregeln

1.1.1 Die Regel NA

$\sqrt{\neg\forall\alpha\varphi}$	<i>Semantische Motivation:</i> logische Äquivalenz; Ermöglichung der weiteren Auswertung mit der Regel E.
$\exists\alpha\neg\varphi$	

1.1.2 Die Regel NE

$\sqrt{\neg\exists\alpha\varphi}$	<i>Semantische Motivation:</i> logische Äquivalenz; Ermöglichung der weiteren Auswertung mit der Regel A.
$\forall\alpha\neg\varphi$	

1.1.3 Die Regel E

$\sqrt{\exists\alpha\varphi}$	δ NEU ; zumindest auf allen Ästen, auf denen die Existenzquantifikation liegt. <i>Semantische Motivation:</i> Einführung eines neuen Namens für ein logisches Individuum, welcher in der Ableitung vor der Anwendung der Regel E noch in überhaupt keiner Formel vorkommt.
$[\varphi]\delta/\alpha$	

1.1.4 Die Regel A

$\forall\alpha\varphi$	δ RELEVANT , Auswertung evtl. MEHRFACH . Eine Individuenkonstante ist <i>relevant</i> genau dann, wenn sie auf einem Ast, der die Allquantifikation enthält, vorkommt. Kommt in diesem Ast überhaupt keine Individuenkonstante vor, so ist ‚a‘ als relevant zu erachten und zu setzen. <i>Semantische Motivation:</i> Aussagen über all jene logischen Individuen, deren Namen in den Ästen, auf denen die Allquantifikation liegt, bereits in irgendwelchen anderen Formeln vorkommen — <i>ohne</i> unnötigerweise mehr Namen für logische Individuen einzuführen als unbedingt notwendig.
$[\varphi]\delta/\alpha$	

Besonderheiten der Regel A:

- Das Ergebnis der Auswertung einer Allquantifikation wird jeweils nur auf einem einzigen Ast eingetragen.¹
- Eine Allquantifikation ist mehrmals auswertbar.² Daher wird sie *nicht* abgehakt.
- Eine Allquantifikation ist *erschöpft*, d.h. in einem Ast nicht mehr auswertbar genau dann, wenn für jede auf dem betreffenden Ast relevante Individuenkonstante δ ein Einsetzungsergebnis in die Formel φ hinter dem Quantifikator, d.i. $[\varphi]\delta/\alpha$, auf dem Ast steht.

¹Wenn ein und dasselbe Auswertungsergebnis auf mehreren Ästen gebraucht wird, so ist das auch kein Problem: Auf jedem Ast wird dann die Regel A eigens angewendet, mit stets derselben Einsetzungskonstante δ .

²Bildlich gesprochen: Die Allquantifikation ist ein sehr starker Satz, da sie von allen logischen Individuen überhaupt handelt. Daher sollte man ihr die Chance geben, zumindest über jene logischen Individuen tatsächlich auch eine Aussage zu machen, die sonst schon in den betreffenden Ästen erwähnt wurden.

Bei Allquantifikationen gilt also, wenn das Ziel ein fertiger Baum ist:

„Nicht abhaken, sondern erschöpfen.“

Allquantifikationen sind im quantorenlogischen Baumkalkül die einzigen Formeln, bei denen man die Überflüssigkeit weiterer Auswertungen *nicht* daran erkennen kann, dass sie abgehakt sind. (Haben Sie bemerkt, dass bei dem Regelschema unter der Überschrift „Die Regel A“ neben der Allquantifikation der Haken ‚ \surd ‘ fehlt?)

1.2 Eine neue Strategieregel

Zusätzlich zu den bereits bekannten junktorenlogischen Strategien zur Vermeidung unnötiger Komplexitäten im Baumkalkül tritt nun noch eine weitere hinzu. Denn eine in einem Ast erschöpfte Allquantifikation verliert ihren Status der Erschöpftheit wieder, wenn auf irgendeine Formel in diesem Ast die Regel E angewendet wird. (Dann gibt es nämlich eine Individuenkonstante, und zwar die durch die Regel E eingeführte neue, für die es auf dem Ast noch kein Auswertungsergebnis der Allquantifikation gibt.) Daher gilt: Vor Anwendung der Regel A möglichst alle Existenzquantifikationen und Formeln, deren Auswertung schließlich solche zeitigen wird — und besonders einfach erkennbar ist das bei negierten Allquantifikationen —, auswerten. Kurz:

„NA und E vor A.“