

Erste Schritte zum Formalisieren im System Q

Formalisieren mit Prädikationen

Mit Prädikationen formalisieren wir das Zuschreiben von Eigenschaften zu Dingen bzw. das Stehen von Dingen in Beziehungen zueinander, sog. „singuläre Sätze“:

„Das Ding a hat die Eigenschaft F “ / „ a ist ein F “	F^1a
„Das Ding a steht zum Ding b in der Beziehung R “	R^2ab
„Das Ding b steht zum Ding a in der Beziehung R “	R^2ba
„Die Dinge a, b und c stehen in der Beziehung R “	R^3abc
„Das Ding a steht zu sich selbst in der Beziehung R “	R^2aa

Formalisieren mit Quantoren

Mit Quantoren formalisieren wir Aussagen über Gesamtheiten von Dingen von der Art „Alle Dinge sind so-und-so“, „Es gibt mindestens ein Ding, sodass es so-und-so ist“, „Kein Ding ist so-und-so“, usf. — sog. „generelle Sätze“.

1. „**Alles ist A .**“

„Was es auch sei: Es ist ein A .“

„Für alle Dinge x gilt: x ist ein A .“

$$\forall x A^1x$$

2. „**Mindestens ein Ding ist A .**“ / „**Es gibt (mindestens) ein A .**“

„Es gibt eines, sodass: Es ist ein A .“

„Für mindestens ein Ding x gilt: x ist ein A .“

$$\exists x A^1x$$

3. „**Alle A sind B .**“

„Was es auch sei: Wenn es ein A ist, dann ist es ein B .“

„Für alle Dinge x gilt: Wenn x ein A ist, dann ist x ein B .“

$$\forall x (A^1x \rightarrow B^1x)$$

4. „Kein A ist (ein) B .“

„Was es auch sei: Wenn es ein A ist, dann ist es nicht der Fall, dass es ein B ist.“

„Für alle Dinge x gilt: Wenn x ein A ist, dann ist es nicht der Fall, dass x ein B ist.“

$$\forall x(A^1x \rightarrow \neg B^1x)$$

oder: „Es ist nicht der Fall, dass es ein Ding gibt, welches ein A ist und ein B ist.“

„Es ist nicht der Fall, dass für mindestens ein Ding x gilt: x ist ein A und x ist ein B .“

$$\neg \exists x(A^1x \wedge B^1x)$$

5. „Mindestens ein A ist (ein) B .“ / „Es gibt ein A , das (ein) B ist.“

„Es gibt eines, sodass es ein A und ein B ist.“

„Für mindestens ein Ding x gilt: x ist ein A und x ist ein B .“

$$\exists x(A^1x \wedge B^1x)$$

6. „Mindestens ein A ist kein B .“ / „Es gibt ein A , das nicht B ist.“

„Es gibt eines, sodass es ein A und (aber) nicht ein B ist.“

„Für mindestens ein Ding x gilt: x ist ein A , und es ist nicht der Fall, dass x ein B ist.“

$$\exists x(A^1x \wedge \neg B^1x)$$

Wir sehen: Formalisieren wir Sätze der Formen 3 bis 6, so ist die allquantifizierte Formel stets eine Subjunktion ($\forall x(\dots \rightarrow \dots)$); die existenzquantifizierte Formel ist stets eine Konjunktion ($\exists x(\dots \wedge \dots)$). Mit einer existenzquantifizierten Subjunktion formalisieren wir so gut wie nie einen sinnvollen deutschen Aussagesatz, da ein solcher Satz sehr schwach ist (d.h., er besagt sehr wenig): Man könnte ihn lesen als „Es gibt ein Ding x , sodass, wenn es ... [und wenn es nicht ..., dann machen wir darüber keine Aussage]“ — was aber nicht viel mehr bedeutet als „Es gibt überhaupt irgendetwas.“

Hingegen ist eine Formalisierung durch eine allquantifizierte Konjunktion ($\forall x(\dots \wedge \dots)$) in viel weniger Fällen sinnlos. Ein solcher Satz kann gelesen werden als „Für alle Dinge x gilt: x ist ... und auch ...“ Zu beachten ist aber, dass das (wie man vielleicht meinen möchte) kein Satz der Form 3 ist, sondern ein Fall von 1! Denn der Satz „Alles ist A und auch B “ (zu formalisieren durch eine allquantifizierte Konjunktion: $\forall x(A^1x \wedge B^1x)$) ist viel stärker als „Alle A sind B “ (ein Satz von der Form 3, $\forall x(A^1x \rightarrow B^1x)$): Ersterer spricht allen Dingen überhaupt beide Eigenschaften, sowohl A als auch B , zu, während letzterer nur über diejenigen Dinge spricht, die die Eigenschaft A haben — und nur diesen spricht er dann auch die Eigenschaft B zu.

7. „Nur A sind B.“

„Was es auch sei: Nur wenn es ein A ist, ist es (auch) ein B.“

„Für alle Dinge x gilt: Nur wenn x ein A ist, dann ist x ein B.“

$\forall x(B^1x \rightarrow A^1x)$

oder: $\forall x(\neg A^1x \rightarrow \neg B^1x)$

8. „Nur A-Dinge, die B sind, sind (auch) C“.

Solche Sätze verdienen etwas Aufmerksamkeit, denn sie sind häufig — aber nicht notwendigerweise immer — so zu verstehen: „Welches A-Ding es auch sei: Nur wenn es ein B ist, ist es (auch) ein C.“ Formalisieren wir nun, streng gemäß Punkt 7: $\forall x(C^1x \rightarrow (A^1x \wedge B^1x))$, so ist diese Formalisierung *für dieses Verständnis* des Satzes zu stark: Denn sie spricht nicht nur über A-Dinge, sondern über alle C-Dinge! Unsere Formalisierung kann nämlich gelesen werden als: „Was es auch sei: Wenn es ein C ist, dann ist es ein A und ein B“ — und so war der Satz wohl eher nicht gemeint.

Sehen wir uns ein Beispiel an: Zunächst „Wer keine Logik mag, mag auch keine Mathematik“ (ohne „nur“) und formalisieren wir mit A^1 für \dots ist ein Mensch, B^1 als \dots mag kein Logik und C^1 \dots mag keine Mathematik. Wir erhalten: $\forall x((A^1x \wedge B^1x) \rightarrow C^1x)$ („Was es auch sei: Wenn es ein Mensch ist und keine Logik mag, dann mag es auch keine Mathematik“) — so weit, so gut.

Lautet unser Satz hingegen: „Nur wer keine Logik mag, mag auch keine Mathematik“, dann könnten wir nach Punkt 7 schlicht Antecedens und Succedens der allquantifizierten Subjunktion vertauschen und erhielten dann: $\forall x(C^1x \rightarrow (A^1x \wedge B^1x))$ („Was es auch sei: Wenn es keine Mathematik mag, dann ist es ein Mensch und mag auch keine Logik“). Doch ist dies unser gewünschtes Ergebnis? Denn wir könnten dann daraus schließen: Die Kaffeetasse, die gerade vor mir steht, mag keine Mathematik.¹ Also ist sie ein Mensch und mag keine Logik!?

Dies ist natürlich deswegen passiert, weil durch die Vertauschung von Antecedens und Succedens (wozu das „nur“ den Anlass gab) das Prädikat A^1 mit in das Succedens gewandert ist und der Satz somit nicht mehr lediglich über Menschen spricht, die keine Mathematik mögen, sondern über alle Dinge überhaupt, die keine Mathematik mögen. Es ist allerdings

¹Wie sollte sie auch? Es ist zu bezweifeln, dass etwas ohne ein Bewusstsein irgendetwas mag. Zumindest ist diese Annahme plausibler als ihr Gegenteil, nämlich dass die Kaffeetasse, die gerade vor mir steht, Mathematik mag.

anzunehmen, dass jemand, der unseren zweiten Beispielsatz äußert, meint: „Für alle Menschen gilt: Nur wenn er/sie keine Logik mag, dann mag er/sie auch keine Mathematik.“

Wollen wir einen solchen Satz also schwächer formalisieren und an dem Verständnis festhalten, das wir gerade eben gewonnen haben, so formalisieren wir besser:

„Was es auch für ein A -Ding sei: Nur wenn es ein B ist, dann ist es auch ein C .“

„Was es auch sei: Wenn es ein A ist, dann: Nur wenn es ein B ist, dann ist es ein C .“

„Für alle Dinge x gilt: Wenn x ein A ist, dann: Nur wenn x ein B ist, dann ist x ein C .“

$\forall x(A^1x \rightarrow (C^1x \rightarrow B^1x))$ oder $\forall x(A^1x \rightarrow (\neg B^1x \rightarrow \neg C^1x))$

oder $\forall x((A^1x \wedge C^1x) \rightarrow B^1x)$ oder $\forall x((A^1x \wedge \neg B^1x) \rightarrow \neg C^1x)$

Wenn wir die Eigenschaft A ein „Gattungsprädikat“ nennen wollen, so können wir sagen: Bei der **starken** Formalisierung solcher „Nur“-Sätze wandert das Gattungsprädikat, A^1 , in das Succedens der allquantifizierten Subjunktion, oder es wird negiert:

$\forall x(C^1x \rightarrow (A^1x \wedge B^1x))$ oder $\forall x(\neg(A^1x \wedge B^1x) \rightarrow \neg C^1x)$.

Bei der **schwachen** Formalisierung solcher „Nur“-Sätze hingegen verbleibt das Gattungsprädikat A im Antecedens der allquantifizierten Subjunktion, bzw. es wird nicht negiert:

$\forall x(A^1x \rightarrow (C^1x \rightarrow B^1x))$ oder $\forall x(A^1x \rightarrow (\neg B^1x \rightarrow \neg C^1x))$

oder $\forall x((A^1x \wedge C^1x) \rightarrow B^1x)$ oder $\forall x((A^1x \wedge \neg B^1x) \rightarrow \neg C^1x)$.